Correction du DM3 de Sciences Physiques : évolution de l'alcoolémie au cours du temps

A - Absorption de l'alcool à travers la paroi stomacale :

1) Notons $c_1(t)$ la concentration de l'alcool dans l'estomac au cours du temps et $v_1 = -\frac{dc_1}{dt}$ la vitesse d'absorption de l'alcool au niveau de la paroi de l'estomac.

Si la réaction est d'ordre 1, on aura aussi $v_1 = kc_1(t)$ et $c_1(t)$ sera donc solution de l'équation diférentielle :

$$\frac{dc_1}{dt} + kc_1 = 0$$

qui se résout immédiatement en :

$$c_1(t) = c_{1,0} \exp(-kt)$$

où $c_{1,0}$ est la concentration initiale, qui vaut : $c_{1,0} = \frac{1}{0{,}250} = 4,0 mol.L^{-1}$.

Ainsi, si la réaction est bien d'ordre 1, on aura :

$$ln\left(\frac{c_1(t)}{c_{1,0}}\right) = -kt$$

Ainsi, on va tracer $ln\left(\frac{c_1(t)}{c_{1,0}}\right)$ en fonction du temps. Si on obtient une droite, l'ordre 1 sera confirmé et la pente de la droite sera égale à l'opposé de la constante de vitesse.

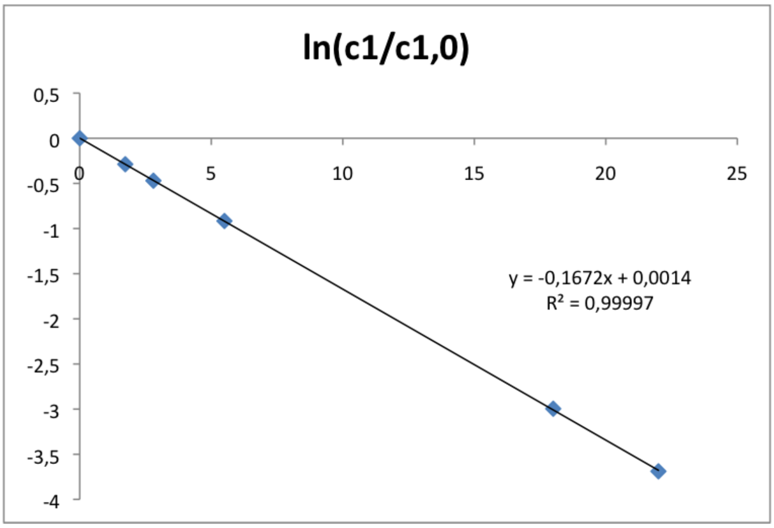

FIGURE 1 – $ln\left(\frac{c_1(t)}{c_{1,0}}\right)$ en fonction du temps, avec régression linéaire

La figure 1 montre bien que la réaction est d'ordre 1 (l'alignement des points est très satisfaisant, comme le confirme la valeur très proche de 1 du coefficient de corrélation), et que la constante de vitesse de la réaction d'absorption vaut :

$$k_1 = 0,167 min^{-1}$$

2) On en déduit le temps de demi réaction :

$$t_{1/2,1} = \frac{ln(2)}{k} \simeq 4,15min$$

(car la réaction est d'ordre 1).

B - Oxydation de l'alcool dans le sang

3) Traçons déjà $c_2(t)$ pour voir son allure :

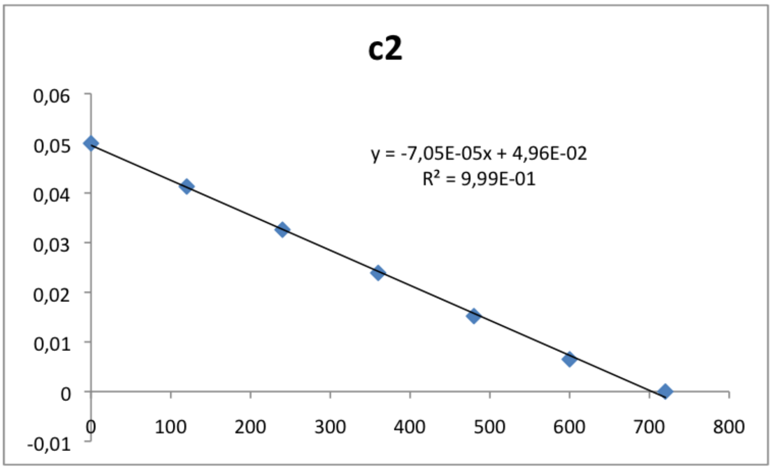

FIGURE 2 – c_2 en fonction du temps, avec régression linéaire

On constate que la courbe représentative de $c_2(t)$ est une droite, ce qui montre que la réaction d'oxydation est d'ordre 0.

En effet, si l'ordre vaut 0, on aura :

$$-\frac{dc_2}{dt} = k_2$$

d'où : $c_2(t) = c_{2,0} - k_2 t$ et la courbe représentative de c_2 sera donc une droite.

Ainsi, la réaction d'oxydation de l'alcool dans le sang est un processus d'ordre 0 et de constante de vitesse $k_2 \simeq 7,05.10^{-5} mol.L^{-1}.min^{-1}$.

Remarque : On pouvait se douter que la réaction était d'ordre 0 vu que la concentration vaut 0 en un temps fini, ce qui n'est possible qu'à cet ordre (pour les autres ordres, la concentration tend vers 0 mais ne vaut jamais exactement 0).

On aurait pu également calculer la vitesse de réaction aux différents instants (en approximant la dérivée par le taux d'accroissement) et constater qu'elle est constante (ou presque) tout au long de la réaction, ce qui est caractéristique de l'ordre 0.

4) On a $c_2(t_{1/2,2}) = c_{2,0}/2$, donc :

$$c_{2,0} - k_2 t_{1/2,2} = c_{2,0}/2$$

soit :

$$t_{1/2,2} = \frac{c_{2,0}}{2k_2} \simeq 354min$$

Ainsi, le processus d'élimination de l'alcool dans le sang est beaucoup plus lent que le processus d'absorption de l'alcool à travers la paroi de l'estomac !

C - Evolution de l'alcoolémie au cours du temps

5) Si on note $n(t)$ le nombre total de moles d'alcool dans le sang (et l'ensemble des compartiments hydriques) à un instant t, on a :

$$n(t) = n_{absorbé} - n_{éliminé}$$

avec $n_{absorbé} = n_{total\ dans\ boisson} - n_{restant\ dans\ estomac} = C_0 V_e - c_1(t) V_e$
et $n_{éliminé} = \xi_2$ (où ξ_2 est l'avancement de la réaction d'oxydation)
D'où :

$$n(t) = C_0 V_e - c_1(t) V_e - \xi_2$$

soit, en divisant par le volume V_s :

$$c(t) = C_0 \frac{V_e}{V_s} - c_1(t) \frac{V_e}{V_s} - x_2(t)$$

en notant $x_2(t)$ l'avancement volumique de la réaction d'oxydation.
En prenant la dérivée de cette dernière relation, on obtient :

$$v(t) = \frac{V_e}{V_s} v_1 - v_2$$

or $v_1 = k_1 c_1$ car l'absorption est d'ordre 1 et $v_2 = k_2$ car l'oxydation est d'ordre 0, donc :

$$v(t) = \frac{V_e}{V_s} k_1 c_1(t) - k_2$$

6) De plus, on sait que comme l'absorption de l'alcool est un processus d'ordre 1, on a : $c_1(t) = C_0 \exp(-k_1 t)$, d'où :

$$v(t) = \frac{V_e}{V_s} k_1 C_0 \exp(-k_1 t) - k_2$$

Il suffit alors d'intégrer (ou plutôt de "primitiver") de chaque côté et on obtient :

$$c(t) = -\frac{V_e}{V_s} C_0 \exp(-k_1 t) - k_2 t + cte$$

De plus $c_2(0) = 0$ puisqu'initialement (i.e. au moment où la personne boît sa boisson alcoolisée) il n'y a pas d'alcool dans le sang de la personne.
On obtient donc en appliquant la relation précédente à $t = 0$: $cte = \frac{V_e}{V_s} C_0$, d'où :

$$c(t) = C_0 \frac{V_e}{V_s} (1 - \exp(-k_1 t)) - k_2 t$$

7) Le degré alcoolique est égal au pourcentage volumique en étahnol, soit :

$$d = \frac{V_{eth}}{V_{tot}} = \frac{m_{eth}}{\rho_{eth} V_{tot}} = \frac{C_{0,m}}{\rho_{eth}}$$

en notant $C_{0,m}$ la concentration massique de l'éthanol dans la bière.

On a donc :

$$C_{0,m} = d \times \rho_{eth} = 0,06 \times 0,79 \simeq 0,0474 kg/l \simeq 47,4 g.L^{-1}$$

soit une concentration molaire :

$$C_0 = \frac{C_{0,m}}{M_{ethanol}} = \frac{47,4}{2 \times 12 + 16 + 6} \simeq 1,03 mol.L^{-1}$$

8) Pour trouver l'instant où $c(t)$ est maximale, il suffit de résoudre $\frac{dc}{dt} = 0$, soit $v(t) = 0$, soit $c_1(t_{max}) = \frac{V_s k_2}{V_e k_1}$ d'après le résultat de la question 5).
Or $c_1(t) = C_0 \exp(-k_1 t)$, d'où :

$$t_{max} = \frac{1}{k_1} ln \left(\frac{V_e k_1 C_0}{V_s k_2} \right)$$

9) L'application numérique donne :

$$t_{max} \simeq 24,6 min$$

puis

$$c_{max} = c(t_{max}) \simeq 0,0236 mol.L^{-1}$$

Or l'alcoolémié limite autorisée pour conduire est de $0,5 g/L$ soit $0,5/46 \simeq 0,011 mol.L^{-1}$.
Ainsi Alice n'a pas le droit de conduire 25 minutes après avoir bu ses deux bières !

11) Déjà on peut remarquer que la coube est en accord avec les valeurs de c_{max} et de t_{max} que l'on a déterminées.

On constate ensuite que la courbe se compose essentiellement de deux parties :

— une croissance exponentielle, qui correspond à l'absorption dans le sang (d'ordre 1)

— une décroissance linéaire, qui correspond à l'élimination de l'alcool du sang (ordre 0)

On voit bien aussi que le processus d'absorption est beaucoup plus rapide que celui d'élimination, comme on l'a montré dans les parties A et B.

D'après la question précédente, Alice peut prendre le volant quand la concentration en alcool dans son sang est devenue inférieure à $0,011 mol/L$. Par lecture graphique, on constate qu'il faudra pour cela qu'elle attende environ $208 min = 3h28min$ après avoir bu ses deux bières.

11) Si on compare la formule de Widmark à la formule que l'on a établie à la question 6, on constate qu'il manque le terme en exponentielle dans la formule de Widmark, ainsi cette formule néglige la durée du phénomène d'absorption de l'alcool à travers la paroi stomacale : comme ce processus est très rapide, on considère qu'il est quasi-instantané et que donc l'alcool passe immédiatement dans le sang.

Avec cette hypothèse, la formule que l'on a établie à la question 6 donne :

$$c(t) = C_0 \frac{V_e}{V_s} - k_2 t$$

soit, sachant que $C_0 = \frac{d \times \rho_{eth}}{M_{eth}}$ (d'après la question 7) et en multipliant tout par la masse molaire de l'éthanol pour passer aux concentrations massiques :

$$c(eng/L) = \frac{d \rho_{eth} V_e}{V_s} - k_2 M_{eth} t$$

ce qui correspond bien à la formule de Widmark.

b) On a vu à la question précédente que $\beta = M_{eth} k_2 = 46 \times 7,05.10^{-5} \simeq 3,24.10^{-3} g.L^{-1}.min^{-1} \simeq 0,19 g.L^{-1}.h^{-1}$.

Ainsi la valeur de la constante β est cohérente avec notre étude précédente.

c) On a, d'après la formule, en notant T le temps au bout duquel Alice pourra conduire :

$$T \simeq \frac{0,5 - \frac{790 \times d \times V_e}{V_s}}{\beta} \simeq 3,42h \simeq 3h25min$$

ce qui est tout à fait cohérent avec le temps que nous avons déterminé à la question 10.