

Devoir Surveillé de Physique - Chimie n°5

- Samedi 14 janvier 2016 -

Durée : 3h00.

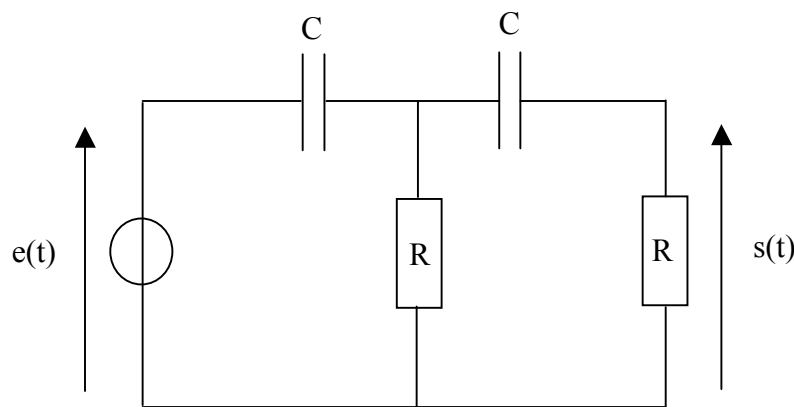
Les calculatrices sont autorisées.

Tout résultat donné dans l'énoncé peut-être utilisé dans les questions suivantes, même si vous n'avez pas su le démontrer.

Soignez la rédaction et la présentation.

Exercice 1 : Etude d'un circuit linéaire d'ordre 2 :

Dans tout cet exercice, on s'intéresse au circuit ci-dessous, dont on va étudier la réponse en régime sinusoïdal forcé, puis la réponse indicielle (i.e. la réponse à un échelon de tension).



A – Etude en régime sinusoïdal, filtrage :

Dans cette partie, la source est sinusoïdale, de pulsation ω .

1) Par une étude qualitative, déterminer quel type de filtrage ce circuit permet de réaliser (passe-haut, passe-bas, passe-bande, coupe-bande).

2) Calculer la fonction de transfert de ce filtre et mettez la sous la forme canonique :

$$\underline{H}(jx) = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite. Vous donnerez les expressions de ω_0 et de Q .

3) Après avoir fait une étude asymptotique, tracer le diagramme de Bode (gain en dB et phase) de ce filtre sur la feuille de papier semi-logarithmique fournie.

Pour les questions suivantes, on supposera que $R = 2,0 \text{ k}\Omega$ et $C = 50 \text{ nF}$.

4) On envoie en entrée du filtre le signal $e(t) = 4 \cos(\omega t)$ où $\omega = 1,0 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$. Déterminer le signal de sortie $s(t)$. Représenter $e(t)$ et $s(t)$ sur un même graphique, en vous appliquant.

5) Dans quelle gamme de fréquence peut-on dire que le filtre a un comportement doublement dérivateur ? Justifier.

B – Réponse à un échelon de tension :

6) À partir de la fonction de transfert établie à la question 2, déterminer l'équation différentielle satisfaite par $e(t)$ et $s(t)$ en régime quelconque.

7) Retrouver cette équation différentielle de manière directe (c'est à dire sans utiliser la notation complexe ou la notion d'impédance).

8) On suppose que pour $t < 0$ la source était éteinte et les condensateurs déchargés. À $t = 0$, on allume la source, qui délivre à présent une tension continue $e(t) = E$.

a) Combien valent $s(0^+)$ et $s(+\infty)$?

b) Résoudre l'équation différentielle satisfaite par $s(t)$ sans chercher à déterminer la valeur des constantes qui interviennent dans la solution.

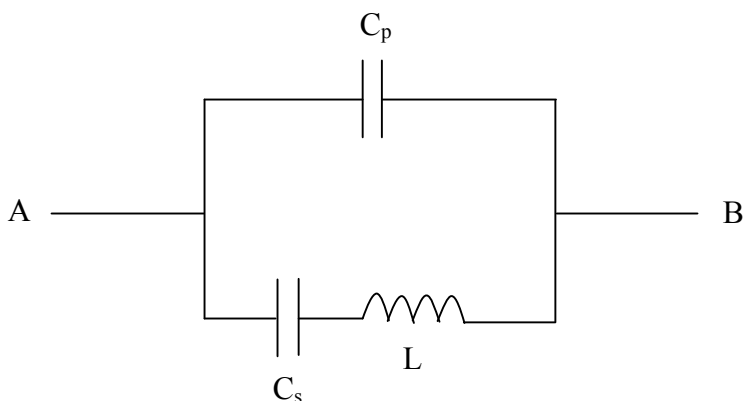
c) Combien vaut le temps caractéristique τ du régime transitoire ? (on donnera une expression littérale puis une valeur numérique en prenant $R = 2,0 \text{ k}\Omega$ et $C = 50 \text{ nF}$).

Exercice 2 : Quartz et électronique :

Le quartz est une forme cristalline de la silice SiO_2 . Il présente une propriété physique très intéressante : la piezo-électricité. Ce phénomène, découvert par les physiciens français Jacques et Pierre Curie en 1880, est caractérisé par l'apparition d'une tension aux bornes du cristal lorsqu'on le comprime. Réciproquement, si on applique une tension au cristal, celui-ci se déforme. Il s'agit donc d'un couplage entre les propriétés électriques et les propriétés mécaniques du matériau.

En appliquant une tension variable aux bornes du quartz, on peut le faire entrer en résonance. Il oscille alors à une fréquence très stable. En comptant ces oscillations, on peut mesurer précisément le temps : c'est le principe des montres à quartz.

On peut donner un modèle électronique d'un cristal de quartz par l'association suivante (où la résistance du quartz est négligée) :



Pour les applications numériques, on prendra $L = 500 \text{ mH}$, $C_s = 0,08 \text{ pF}$ et $C_p = 8 \text{ pF}$.

A – Etude de l'impédance équivalente du quartz :

1) Calculer l'impédance complexe \underline{Z} du quartz, vue entre les bornes A et B, et la mettre sous la forme :

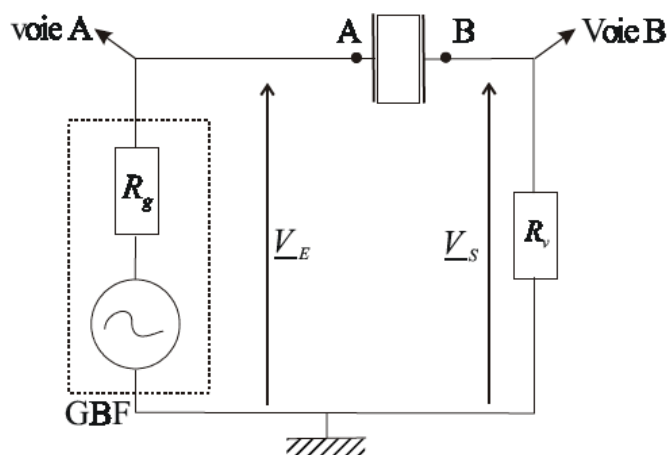
$$\underline{Z} = \left(-\frac{j}{\alpha\omega} \right) \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}, \text{ en précisant les expressions de } \alpha, \omega_r \text{ et } \omega_a \text{ en fonction de } L, C_p \text{ et } C_s.$$

- 2) Donner les valeurs numériques des fréquences f_a et f_r correspondant respectivement aux pulsations ω_a et ω_r .
- 3) Etudier précisément le signe de la partie imaginaire de \underline{Z} en fonction de ω et représentez l'allure de $\text{Im}(\underline{Z})$ en fonction de ω . Dans quel domaine de fréquences le quartz a-t-il un comportement inductif ? Dans quel domaine de fréquences le quartz a-t-il un comportement capacitif ?

B – Etude expérimentale de la résonance d'un quartz :

On veut tracer la courbe donnant l'impédance du quartz en fonction de la fréquence d'excitation. On dispose d'un générateur basses fréquences pouvant délivrer une tension sinusoïdale d'amplitude réglable. Le GBF possède une résistance interne R_g . On dispose d'une résistance R_v variable, d'un quartz et d'un oscilloscope.

On réalise alors le montage suivant :



- 4) Exprimer le rapport $\underline{H} = \frac{V_s}{V_e}$ de la tension de sortie sur la tension d'entrée, en fonction de R_v et de l'impédance complexe \underline{Z} du quartz.
- 5) Pour chaque fréquence, on choisit la résistance R_v de façon que $|\underline{H}| = \frac{1}{2}$. Que vaut dans ce cas le module de l'impédance du quartz en fonction de R_v ?

Dans la question suivante, on ne néglige plus la résistance du quartz.

- 6) Autour du pic de résonance d'intensité (situé vers 796 kHz), on mesure une bande passante de 50 Hz. En déduire une estimation du facteur de qualité Q du quartz. Commenter cette valeur. En supposant que le facteur de qualité soit donné par $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ (ω_0 étant la pulsation de résonance), estimer la valeur de la résistance R du quartz.

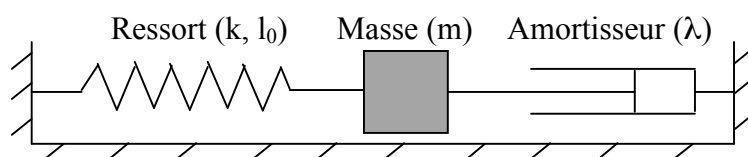
C – Principe d'une montre à quartz :

Une horloge est constituée, en général, d'un système oscillant (de période quasi-constante) et d'un système de comptage des oscillations. Dans le cas d'une montre à quartz, le système oscillant est constitué d'un quartz dont la fréquence de résonance est $f_r = 32\,768$ Hz, ce qui signifie que 32 768 fois par seconde, une impulsion électrique est émise par le circuit oscillant. Un dispositif électrique doit ensuite compter ces impulsions. Celui-ci est constitué de plusieurs « compteurs modulo 2 ». Un compteur modulo 2 est un circuit qui délivre une impulsion de sortie dès qu'il a compté deux impulsions à son entrée.

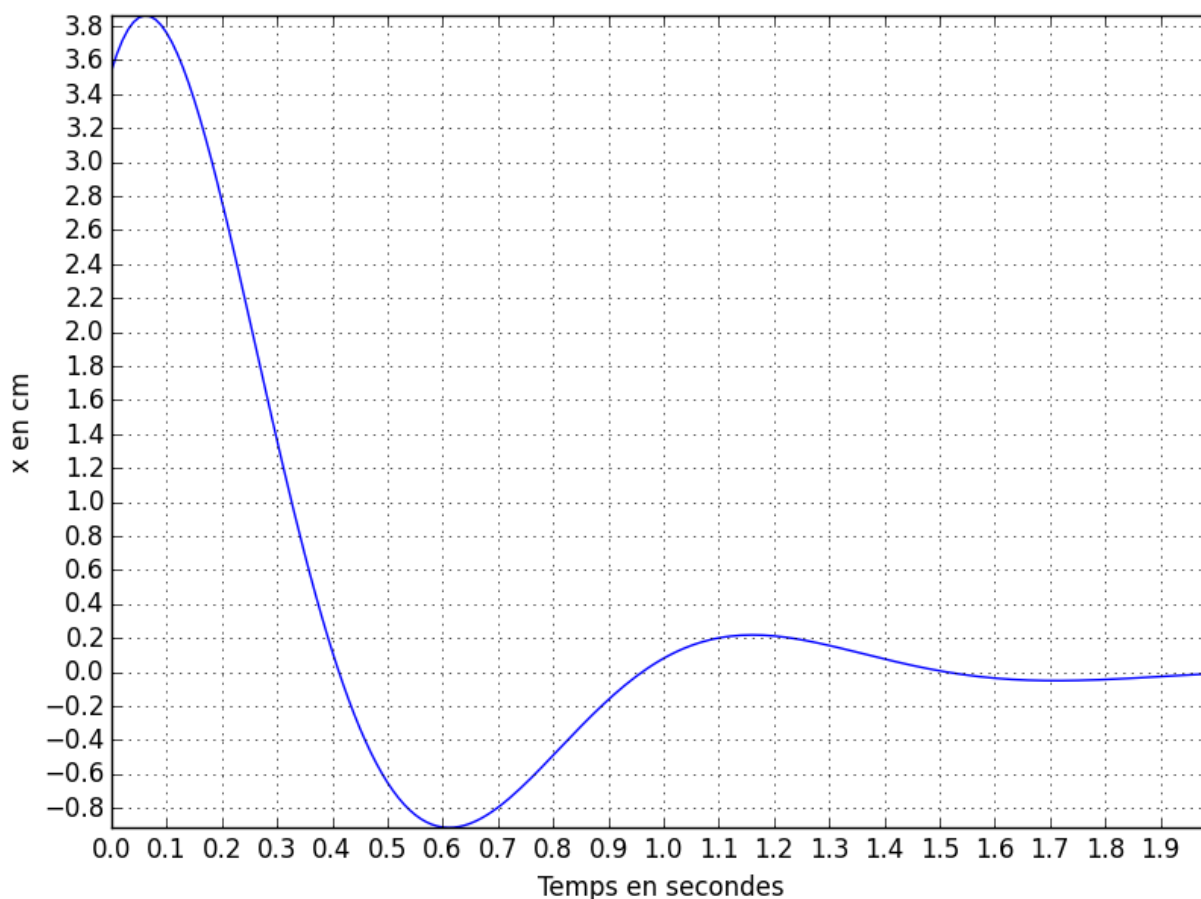
- 7) Combien de compteur modulo 2 faut-il mettre en cascade pour commander le chiffre des secondes de la montre ?

Exercice 3 : Détermination des caractéristiques d'un oscillateur :

On considère un oscillateur amorti constitué d'une masse m posée sur une table à coussin d'air (horizontale) et reliée au bâti par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . La masse est également soumise à une force de frottements $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ de la part d'un amortisseur fluide :



- 1) Etablir l'équation différentielle satisfaite par l'élongation $x = l - l_0$ du ressort. On fera apparaître la pulsation propre ω_0 du système ainsi que son facteur de qualité Q .
- 2) Un enregistrement des oscillations libres de la masse a donné la courbe suivante :



- a) En déduire, le plus précisément possible, les valeurs de ω_0 et de Q .
- b) Sachant que la masse vaut $m = 500$ g, en déduire les valeurs de la constante de raideur k du ressort et du coefficient de frottement λ (on n'oubliera pas de préciser leurs unités).