**Devoir Surveillé de Physique - Chimie n°6**
**- Samedi 4 février 2017 -**

*Durée : 3h00.*

*Les calculatrices sont autorisées.*

*Tout résultat donné dans l'énoncé peut-être utilisé dans les questions suivantes, même si vous n'avez pas su le démontrer. Vous pouvez donc traiter certaines parties d'un problème même si vous n'avez pas répondu aux questions précédentes.*

*Ne vous précipitez pas (mieux vaut en faire moins mais le faire mieux), appliquez vous et soignez la rédaction et la présentation.*

## Problème 1 : Trajectoire d'un volant de badminton :

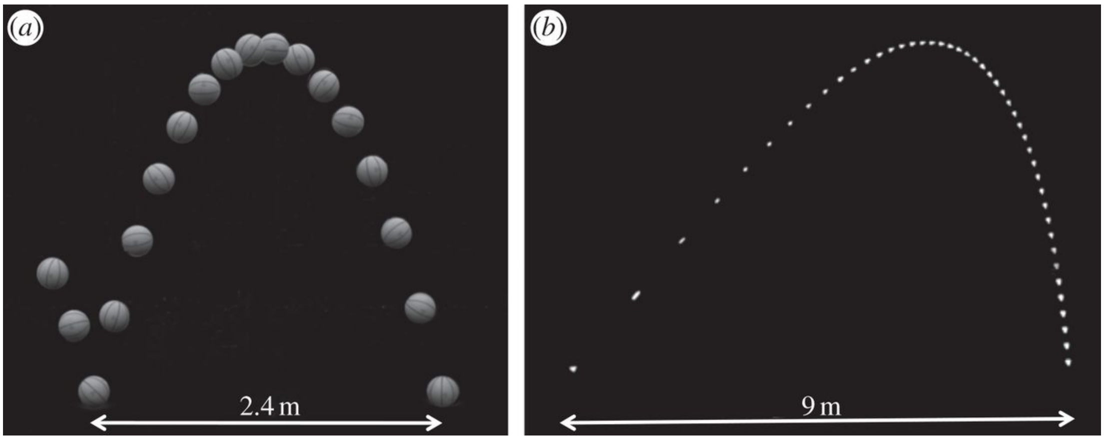



*Figure 1 : (a) trajectoire d'un ballon de basket et (b) d'un volant de badminton*

Les deux chronophotographies ci-dessus représentent les trajectoires d'un ballon de basket (à gauche) et d'un volant de badminton (à droite). On remarque que la trajectoire du volant de badminton est très différente de celle du ballon. Dans cet exercice tente de comprendre ces différences et d'expliquer la trajectoire du volant de badminton.

Dans tout le problème, la poussée d'Archimède sera négligée. Les seules forces que l'on prendra en compte sont donc le poids et la résistance de l'air.

On suppose que le volant de masse m est lancé avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ de norme $v_0$ faisant un angle $\theta_0$ avec l'horizontale. On prendra un repère (O, x, y), où O coïncide avec la position initiale du volant, l'axe (Ox) est horizontal dirigé vers la droite et l'axe (Oy) vertical dirigé vers le haut.

1) Dans cette question, on néglige les frottements de l'air. Déterminer l'équation y(x) de la trajectoire du volant et tracer son allure. Déterminer la portée $x_{max}$ en fonction de $v_0$, $\theta_0$ et de l'accélération de la pesanteur g. Faire l'application numérique en prenant les valeurs indiquées dans la figure 2 (page suivante). En comparant vos résultats et la trajectoire réelle de la figure 2, ce modèle est-il satisfaisant ?

On va à présent tenir compte des frottements de l'air sur le volant de badminton. On se demande dans un premier temps s'il vaut mieux modéliser les frottements de l'air par une force de norme proportionnelle au carré de la vitesse ou une force proportionnelle à la vitesse. La mécanique des fluides nous apprend que l'expression de la force de frottements dépend d'un nombre sans dimension appelé « nombre de Reynolds » et noté Re. De manière simplifiée, on peut dire que :
- si Re < 1, l'écoulement de l'air est laminaire et les frottements sont proportionnels à la vitesse
- si Re > $10^4$, l'écoulement est turbulent, et les frottements sont proportionnels au carré de la vitesse

2) Sachant que le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension qui dépend uniquement de la taille L de l'objet, de sa vitesse v, de la masse volumique ρ du fluide dans lequel l'objet se déplace et de la *viscosité* η de ce fluide (qui s'exprime en Pa.s) et qu'il est proportionnel à la vitesse de l'objet, déterminer par une analyse dimensionnelle son expression. Sachant que, pour l'air $\rho \approx 1{,}2\ kg.m^{-3}$ et $\eta \approx 1{,}7.10^{-5}\,Pa.s$, évaluez le nombre de Reynolds correspondant à l'écoulement de l'air autour du volant de badminton. Est-on en régime laminaire ou turbulent ?

Compte tenu du résultat précédent, on va considérer que force de frottement de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse. Plus précisément, elle s'écrit :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S C_x v \vec{v}$$

où S est la section (en m²) du volant, ρ la masse volumique de l'air, $\vec{v}$ le vecteur vitesse du volant et $v$ sa norme.

3) Déterminer la dimension de $C_x$ (autrement dit : quelle est son unité ?).

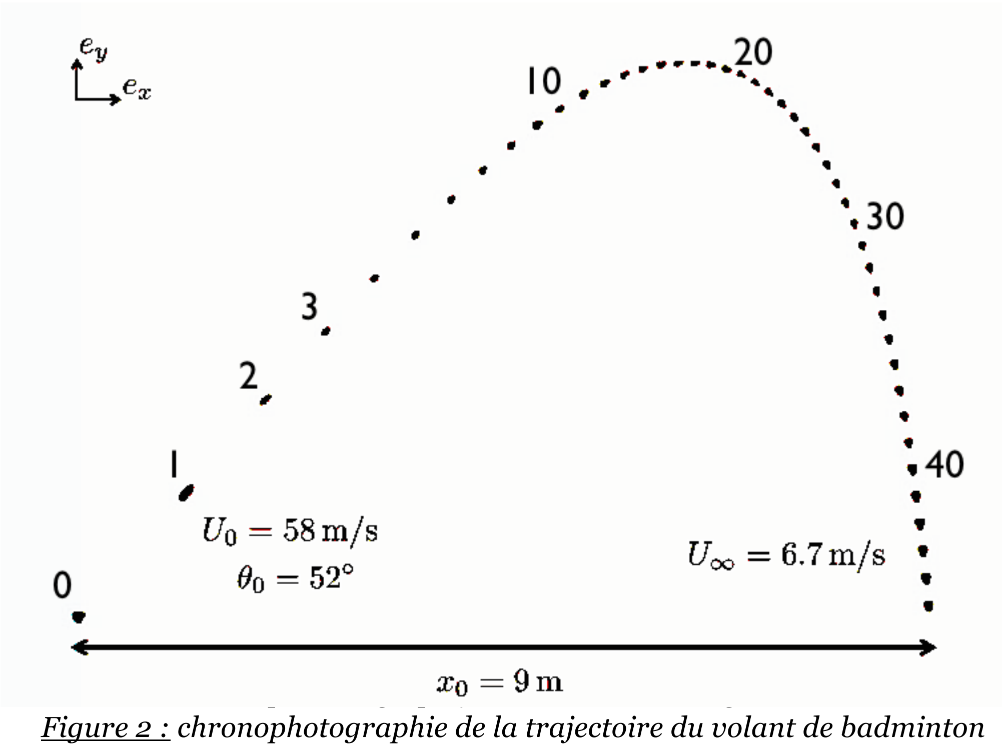
4) Ecrire l'équation différentielle satisfaite par le vecteur vitesse $\vec{v}$ du volant. Montrer qu'elle admet une solution particulière correspondant à un mouvement rectiligne uniforme dont on exprimera la vitesse, notée $\overrightarrow{v_{\lim}}$ en fonction des paramètres du problème.

5) Réécrire l'équation du mouvement en ne faisant intervenir que $\vec{v}$, $\vec{g}$ et $v_{\lim}$.

6) À quelle condition sur v et $v_{lim}$ peut-on négliger la pesanteur devant la force de frottements ? On suppose que cette condition est initialement vérifiée.
Expliquer sans calculs pourquoi, si on néglige la pesanteur, la trajectoire sera rectiligne. (Rem : si vous préférez, vous pouvez le justifier par le calcul, mais c'est plus difficile !)

7) En négligeant la pesanteur et en sachant que la trajectoire est alors rectiligne déterminer l'expression de $v$ (norme du vecteur vitesse du volant) en fonction du temps. En utilisant cette expression, déterminer et calculer le temps $t_{1/2}$ pour lequel la vitesse est égale à la moitié de la vitesse initiale.
*<u>Indication :</u> Puisque l'on suppose que la trajectoire est rectiligne, on pourra projeter l'équation différentielle dans la direction de la trajectoire, puis penser à la technique de séparation des variables pour la résoudre.*

8) Déterminer une estimation de $t_{1/2}$ à partir de la chronophotographie (figure 2). Ce résultat est-il cohérent avec celui de la question précédente ?




<u>Figure 2 :</u> *chronophotographie de la trajectoire du volant de badminton*

9) Toujours dans le cadre de l'approximation de la question 6), déterminer l'expression donnant la distance horizontale x(t) parcourue au temps t, puis exprimer x en fonction de v.

10) On suppose que l'approximation de la question 6) cesse d'être valable lorsque la composante verticale de la force de freinage est égale (en norme) au poids. Quelle est l'expression de v à cet instant ? En déduire la distance parcourue D.

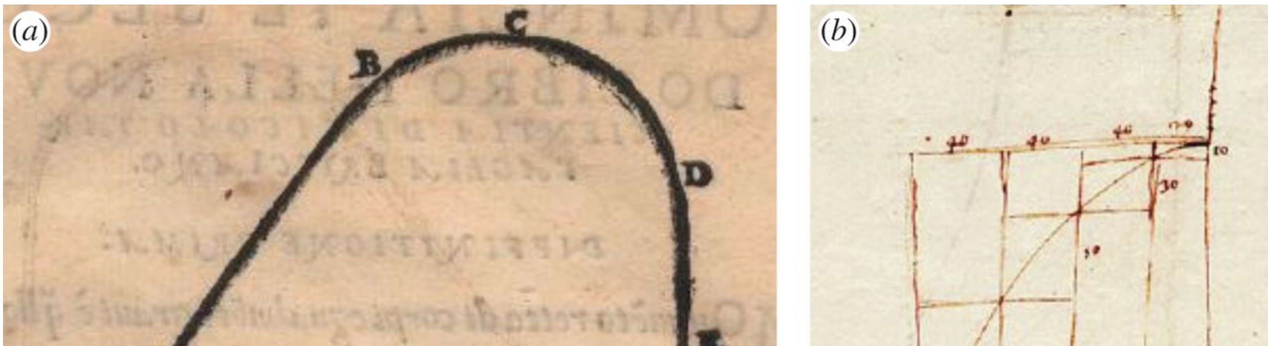
On modélise la trajectoire du volant en distinguant trois régimes successifs : (1) le régime que l'on vient d'étudier, durant lequel l'accélération de la pesanteur est négligeable ; (2) un régime intermédiaire ; (3) un régime limite durant lequel l'accélération du volant est négligeable.

11) D'après la chronophotographie, au bout de combien de temps environ atteint-on le régime limite ainsi défini ?

12) Une approximation de la trajectoire consiste à oublier la partie correspondant au régime intermédiaire. Dessinez la trajectoire obtenue dans cette approximation puis déterminer la portée $x_{max}$ du tir dans cette approximation (expression littérale et numérique). L'accord avec la chronophotographie est-il meilleur ou pire qu'à la question 1 ?

13) Durant le régime intermédiaire, tous les termes de l'équation du mouvement sont du même ordre de grandeur. En assimilant cette partie de la trajectoire à un arc de cercle, en déduire une estimation de la distance parcourue lors de ce régime intermédiaire. En tenant compte de cette distance, l'accord avec la chronophotographie est-il correct ?

14) Compte tenu des résultats de cet exercice, expliquez brièvement ce qui permet d'expliquer la différence entre la trajectoire du ballon de basket et celle du volant de badminton (figure 1).




*<u>Figure 3 :</u> Les débuts de la balistique*
*(a) illustration de la trajectoire d'un boulet de canon par Niccolo Tartaglia (1537) et (b) construction de la trajectoire parabolique par Galilée (1638).*

## Problème 2 : Etude de l'accéléromètre d'une console de jeu :

L'accéléromètre ADLX qui équipe les manettes des consoles Nintendo WiiU™ est un accéléromètre de type pendulaire. La fiche constructeur précise qu'il peut mesurer des accélérations comprises entre $-5g$ et $+5g$, que la plus petite accélération mesurable est de $0{,}01g$, et qu'il peut résister à des chocs allant jusqu'à $1000g$ (où $g = 10\,m.s^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur).

### A – Ordres de grandeur :

1) Donner, en précisant la méthode utilisée, les ordres de grandeur des accélérations subies par la manette de jeu placée dans la main d'un joueur agitant rapidement ou lentement le bras. Les situer relativement aux valeurs annoncées par le constructeur.

Un accéléromètre pendulaire peut-être assimilé à un système masse - ressort amorti, dont le schéma de principe est présenté sur la figure 1 ci-dessous.

L'accéléromètre se compose d'une masse d'épreuve m, astreinte à se déplacer selon un axe $\vec{u}$ solidaire du boîtier extérieur de l'accéléromètre. La masse d'épreuve est reliée au boîtier par un ressort de raideur k. On note X la position de la masse d'épreuve par rapport au centre du boîtier. La position au repos de la masse d'épreuve, lorsque l'axe $\vec{u}$ est horizontal, est X = 0.

On suppose que la masse d'épreuve subit également une force de frottement visqueux $\vec{F} = -2m\gamma\dot{X}\vec{u}$ où $\gamma$ est une constante positive.

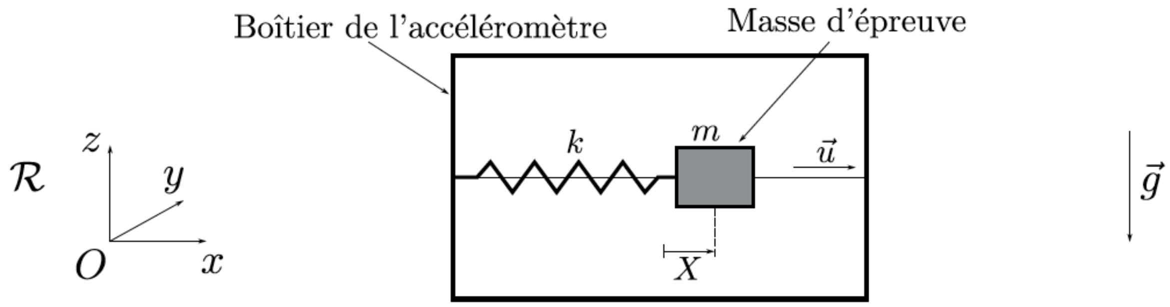



Figure 5 : Schéma d'un accéléromètre pendulaire.

Le boîtier se déplace dans le référentiel terrestre R supposé Galiléen et on note $\vec{a}$ son accélération dans ce référentiel. Lorsque le boîtier subit une accélération, la masse d'épreuve quitte sa position d'équilibre. La mesure de la position X permet alors de déduire l'accélération du boîtier.

On suppose que l'accéléromètre garde une orientation fixe et horizontale selon l'axe Ox ($\vec{u} = \vec{u_x}$). De plus, l'accéléromètre ne se déplace que selon l'axe Ox ($\vec{a} = a(t)\vec{u_x}$). On notera $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

2) Donner l'équation différentielle vérifiée par la variable X(t), faisant intervenir $\omega_0$, $\gamma$ et $a(t)$.
<u>Indication :</u> *Pour cela, on pourra appliquer la deuxième loi de Newton à la masse d'épreuve dans le référentiel terrestre (Galiléen), en faisant attention au fait que X(t) représente la position de la masse d'épreuve par rapport au centre du boîtier, et pas par rapport au point O.*

<u>Rem :</u> Pour traiter la suite de l'exercice, on pourra admettre que cette équation différentielle est :

$$\boxed{\ddot{X} + 2\gamma\dot{X} + \omega_0^2 X = -a(t)}$$

## B – Réponse à une accélération constante :

Dans cette partie, on suppose que l'accéléromètre ainsi que sa masse d'épreuve sont immobiles pour des temps t négatifs, et que l'accéléromètre subit une accélération constante $\vec{a} = a\,\overrightarrow{u_x}$ pour des temps t positifs.

3) Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle :
   a) dans le cas faiblement amorti où $\gamma < \omega_0$
   b) dans le cas fortement amorti où $\gamma > \omega_0$

Dans les deux cas, on ne cherchera pas à calculer les constantes d'intégration qui apparaissent dans les expressions.

4) Montrer que dans les deux cas, faiblement et fortement amorti, X(t) tend vers une valeur stationnaire dont on donnera l'expression.

5) Tracer l'allure de X(t) dans les deux cas, faiblement et fortement amortis.

On appelle temps de réponse de l'accéléromètre le temps caractéristique pour que X(t) atteigne le régime stationnaire.

6) Donner le temps de réponse de l'accéléromètre dans les deux cas, faiblement et fortement amorti.

7) Tracer l'allure du temps de réponse de l'accéléromètre en fonction du paramètre $\gamma$, pour une pulsation $\omega_0$ fixée.

*Indication : Pour déterminer l'allure de la courbe dans le cas fortement amorti, on pourra simplifier l'expression obtenue en utilisant le développement limité :* $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ *pour* $x << 1$.

8) D'après le graphe de la question précédente, quel est le temps de réponse minimal pour un accéléromètre de pulsation $\omega_0$ donnée ?

D'après la fiche constructeur, l'accéléromètre ADLX possède les caractéristiques suivantes : pulsation propre $\omega_0 = 2\pi \times 5500\ rad.s^{-1}$, facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = 5$.

9) Donner la valeur numérique du temps de réponse de l'accéléromètre, ainsi que celle du déplacement stationnaire de la masse d'épreuve pour une accélération de $1g$.

10) Pourquoi peut-on dire que les performances de ces accéléromètres résultent d'un compromis entre temps de réponse et sensibilité, c'est à dire qu'un accéléromètre très sensible aura un temps de réponse long ?

## C – Réponse à une accélération sinusoïdale et filtrage :

On suppose à présent que l'on secoue l'accéléromètre sinusoïdalement à une pulsation $\omega$, ce qui correspond à $a(t) = A_m \cos(\omega t)$ (où $A_m$ désigne l'amplitude de l'accélération imposée au boîtier).

11) Une fois le régime sinusoïdal établi, quelle sera l'amplitude $X_m$ de X(t) ? (en fonction de $A_m$, $\omega$, $\omega_0$, $\gamma$).

12) Pour quelle valeur $\omega_r$ de $\omega$ $X_m$ sera-t-elle maximale ? Comment s'appelle ce phénomène ?

Le dispositif mécanique de l'accéléromètre peut-être vu comme un filtre, pour lequel le signal d'entrée serait l'accélération a(t) imposée au boîtier, et le signal de sortie le mouvement X(t) de la masse d'épreuve.

13) De quel type de filtre s'agit-il ? (passe-haut, passe-bas, passe-bande, ...).
Après avoir fait une étude asymptotique de la fonction de transfert, tracer sur la feuille de papier semi-logarithmique fournie le diagramme de Bode de ce filtre, en prenant les valeurs de $\omega_0$ et de $Q$ données à la suite de la question 8. Au delà de quelles fréquences l'accéléromètre fonctionnera plus ? Qu'en pensez-vous ?

14) a) Proposez le schéma d'un filtre électronique (pouvant utiliser des résistances, des condensateurs et des bobines) qui permettrait de réaliser la même opération de filtrage que l'accéléromètre (et qui soit du même ordre).

b) En étudiant le comportement de votre filtre à très basse et très haute fréquence, justifiez qu'il s'agit bien du type de filtre désiré.

c) Calculer la fonction de transfert de votre filtre et en déduire les valeurs des composants que l'on doit choisir si l'on veut obtenir les mêmes valeurs de $\omega_0$ et de Q que pour l'accéléromètre (soit $\omega_0 = 2\pi \times 5500\ rad.s^{-1}$ et $Q = \dfrac{\omega_0}{2\gamma} = 5$).

*** FIN DU SUJET ***