Feuille d'exercices n°15 : Dynamique du point : Aspect énergétique

Exercice 1 : Ralentissement d'un navire (ENAC 2002) :

La force de résistance F exercée par l'eau sur certains modèles de navires, pour des vitesses v comprises entre 10 km/h et 20 km/h, est une fonction du type $F = kv^3$ où k est une constante.

1) Sachant que lorsque le moteur fournit une puissance propulsive P = 4 MW, la vitesse limite atteinte par le navire est de 18 km/h, exprimer puis calculer k (en précisant son unité).

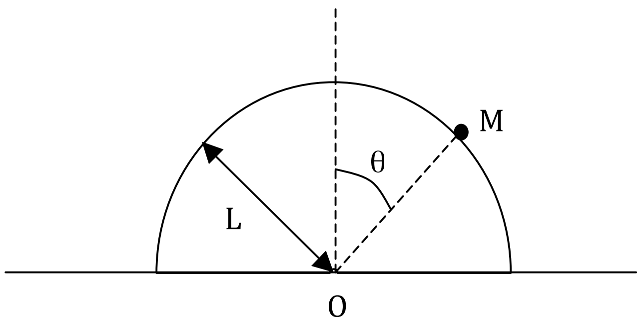
2) Le moteur est coupé alors que le navire de masse m = 12000 t se déplace à la vitesse v_1 = 16 km/h. Calculer la durée t_0 nécessaire pour que la vitesse du navire tombe à la valeur v_2 = 13 km/h.

3) Montrer que la distance d parcourue par le navire peut s'écrire : $d = A\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right)$ puis calculer la valeur numérique de d.

Exercice 2 : La bille qui décolle :

Un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur une demi-sphère de centre O et de rayon L (voir schéma).

Il est lâché quasiment au sommet de la demi-sphère, sans vitesse initiale. Calculer l'angle et le temps auxquels le point matériel quitte la demi-sphère.



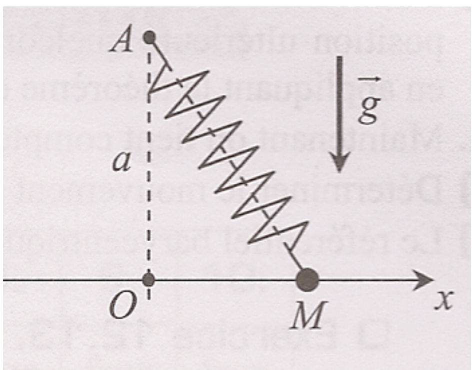
Exercice 3 : Utilisation de l'énergie potentielle :

Une particule de masse m a un mouvement unidimensionnel selon l'axe (Ox) et son énergie potentielle est :

$$E_p(x) = E_0\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^4\right],$$ où E_0 et a sont deux constantes positives.

1) Donner l'expression de la force F(x) qui agit sur la particule ($\vec{F} = F(x)\vec{u_x}$).
2) Déterminer les variations de $E_p(x)$ et tracer la courbe représentant cette fonction. Trouver les positions d'équilibre stable et instable.
3) Quelle est la pulsation angulaire ω des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable ?
4) Quelle est la vitesse minimale que la particule doit avoir à l'origine pour pouvoir s'échapper à l'infini?
5) A t = 0, la particule est à l'origine et sa vitesse est positive et égale à celle calculée à la question précédente. Calculer x(t) et la tracer.

Exercice 4 : Oscillations le long d'une tige :

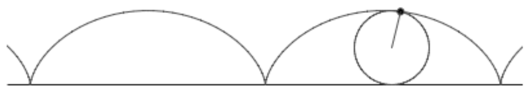


Un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, est astreint à se déplacer sans frottements le long d'une tige rectiligne horizontale, choisie comme axe (Ox). Il est relié à un ressort (longueur à vide l_0, raideur k) dont l'autre extrémité est fixée en A. La distance de A à la tige est AO = a.

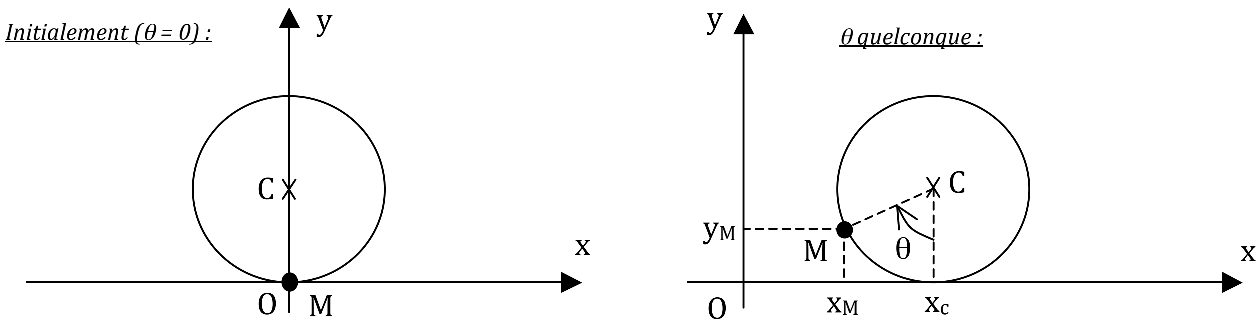
1) Exprimer l'énergie potentielle totale $E_p(x)$.
2) Rechercher les différentes positions d'équilibre et étudier leur stabilité.
3) On étudie les oscillations autour de O dans le cas où a > l_0. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
4) En ne gardant que les termes d'ordre 1 en x (c'est à dire en négligeant les termes en x^2, x^3, …), en déduire la période des petites oscillations.

Exercice 5 : Cycloïde et pendule d'Huygens :

Partie 1: Qu'est-ce qu'une cycloïde?



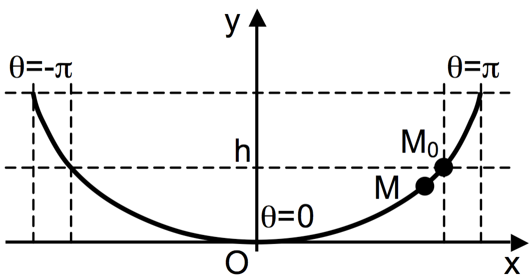
C'est la trajectoire d'un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite. De minière plus parlante, c'est la courbe que décrit un chewing-gum collé à une roue de vélo. On va tout d'abord établir l'équation paramétrique de cette courbe.
On considère une roue de centre C et de rayon R qui roule sans glisser sur l'axe (Ox). Le mouvement de la roue est paramétré par l'angle θ dont a tourné un rayon de la roue depuis sa position initiale.



a) Quand la roue a fait un tour complet (i.e. θ passe de 0 à 2π radians), quelle est l'abscisse x_c du centre de la roue ? (en prenant $x_c = 0$ initialement).
b) Généraliser ce résultat : combien vaut x_C pour un angle θ quelconque ?
c) Montrer que les coordonnées cartésiennes du point M de la périphérie de la roue qui coïncidait avec l'origine pour θ=0 sont données par :

$$x(\theta) = R(\theta - \sin\theta)$$
$$y(\theta) = R(1 - \cos\theta)$$

Partie 2 : Une propriété remarquable de la cycloïde : l'isochronisme.



Un point matériel de masse m glisse sans frottement le long d'une cycloïde (renversée) placée dans un plan vertical (xOy) et ayant pour équations paramétriques:

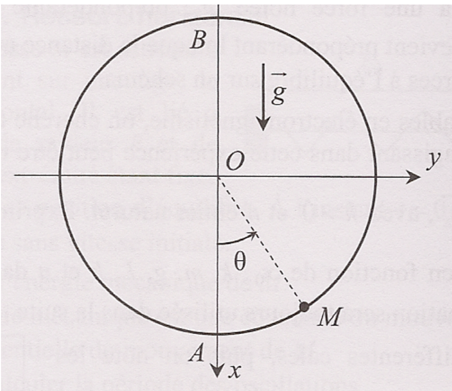
$$x(\theta) = a(\theta + \sin\theta)$$
$$y(\theta) = a(1 - \cos\theta)$$

On libère M en M_0 d'une hauteur h par rapport à O, sans vitesse initiale.

a) Calculer l'abscisse curviligne s (c'est-à-dire l'abscisse le long de la trajectoire) en fonction de θ.
Indication : Le long de la courbe, on a $ds^2 = dx^2 + dy^2$.
b) Exprimer la conservation de l'énergie mécanique par une équation ne faisant intervenir que s.
c) En déduire que le mouvement est périodique et que la période des oscillations est indépendante de l'amplitude des oscillations.

Remarque : Cette propriété a été démontrée par Christiaan Huygens (Pays-Bas, 1629-1695). On peut démontrer que la cycloïde est la seule courbe à posséder cette propriété d'isochronisme exact.

Exercice 6 : Mouvement sur un cercle :



Un anneau de masse m, assimilable à un point matériel M, peut coulisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R. L'anneau est lancé à l'instant initial avec une vitesse de norme v_0 depuis le point A, point le plus bas du cerceau. On repère sa position au cours de son mouvement par l'angle θ (voir figure).

1) Etablir l'expression de l'énergie potentielle de M en fonction de θ.

2) Tracer la courbe $E_p(\theta)$ et déterminer les positions d'équilibre de M.

3) On cherche à déterminer le mouvement possible de M selon la vitesse initiale.

a) Montrer que l'énergie mécanique de M se conserve et donner sa valeur.

b) En déduire, à partir d'un raisonnement graphique, qu'il y a deux types de mouvement possibles en fonction de la valeur de v_0. Préciser la valeur critique de v_0 séparant ces deux cas.

Exercice 7 : Vibrations d'une molécule diatomique :

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses ponctuelles, m_1 pour l'atome de carbone et m_2 pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considèrera ici que l'atome de carbone est fixe dans le référentiel terrestre (supposé galiléen) et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes selon un axe (Ox). On néglige la gravitation.

L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique de Morse : $V(r) = V_0\left[1 - e^{-\beta(r-r_0)}\right]^2$ où r est la distance entre les deux atomes et où V_0, β et r_0 sont des constantes positives, avec $\beta r_0 >> 1$.

1) Tracez un graphe de V(r), en faisant bien apparaître V_0 et r_0. Au vu de ce graphe, que représente la distance r_0 ?

2) Déterminez, en fonction des différentes constantes du problème, la fréquence f des oscillations de l'atome d'oxygène autour de sa position d'équilibre (c'est à dire la fréquence des vibrations de la molécule). Vérifiez l'homogénéité de votre résultat.

Questions à choix multiples

10. A massless spring with force constant k launches a ball of mass m. In order for the ball to reach a speed υ, by what displacement s should the spring be compressed?

(A) $s = \upsilon\sqrt{\frac{k}{m}}$

(B) $s = \upsilon\sqrt{\frac{m}{k}}$

(C) $s = \upsilon\sqrt{\frac{2k}{m}}$

(D) $s = \upsilon\frac{m}{k}$

(E) $s = \upsilon^2\frac{m}{2k}$

28. A spring of force constant k is stretched a certain distance. It takes twice as much work to stretch a second spring by half this distance. The force constant of the second spring is

(A) k
(B) $2k$
(C) $4k$
(D) $8k$
(E) $16k$

3- 3 balles sont lancées avec la même vitesse V_0 depuis le sommet d'un immeuble de 4 étages. A vers le haut, B vers le bas, C avec un angle de 45°vers le bas. Quand elles touchent le sol, que peut-on dire au sujet de leurs vitesses en négligeant la résistance de l'air ?

a) $V_A > V_B > V_C$
b) $V_B > V_C > V_A$
c) $V_B = V_C > V_A$
d) $V_A = V_B = V_C$