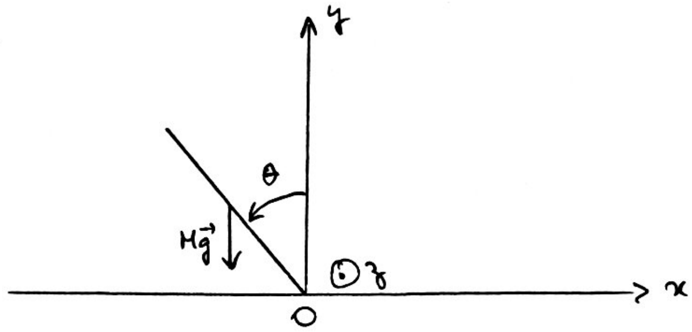
Correction d'exercices de la feuille 19 : moment cinétique

Exercice 1 :



1) Appliquons le thm. du moment cinétique à l'arbre, par rapport à (Oz), dans le ref. terrestre supposé galiléen :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F})$$

avec $L_z = I\dot{\theta}$

- $M_z(\vec{P}) = \overbrace{\frac{L}{2}\sin\theta}^{\text{bras de levier}} . Mg$
- $M_z(\vec{R}) = 0$ où $\vec{R}$ est la réaction du sol sur le point d'appui de l'arbre (son moment est nul car elle s'applique en O).

Ainsi $I\ddot{\theta} = \frac{L}{2} Mg \sin\theta \Rightarrow \frac{1}{3}\cancel{M}L^2\ddot{\theta} = \frac{L}{2}\cancel{M}g\sin\theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

2) On multiplie l'eq° précédente par $\dot{\theta}$ et on intègre :

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta . \dot{\theta}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta + cte$ avec $cte = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta_0$

$\Rightarrow \dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$ On garde le signe + car $\dot{\theta} > 0$ comme le montre la figure.

3) Ainsi $\dfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{\dfrac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$

$$\Rightarrow \quad dt = \sqrt{\frac{L}{3g}} \; \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{L}{3g}} \cdot \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$$

$\pi/2$ ← angle final

θ_0 ← angle initial

(où τ est le tps de chute)

$$\Rightarrow \quad \tau = 5,1 \sqrt{\frac{30}{30}}$$

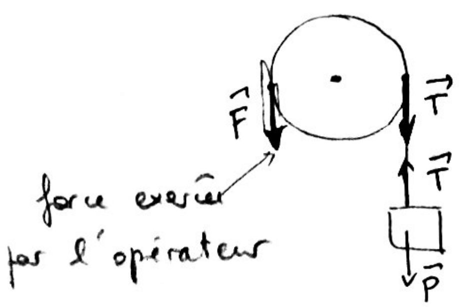
$$= 5,1 \text{ s.}$$

<u>Exercice 3 :</u>

1) Puisque le fil est inextensible, on a $v = R\dot{\theta}$.

2) Pour empêcher la poulie de tourner, il faut que le moment (par rapport à l'axe de rotat°) de la force exercée par l'opérateur soit opposé au moment de la tension du fil. Or $T = mg$ (équilibre de la masse) et le bras de levier de la tension est le même que celui de la force de l'opérateur.

Il faut donc que $\vec{F} = m\vec{g}$.



Rem : on voit que l'opérateur doit exercer sa force dans le même sens que le poids, pour que son moment soit opposé !

3) • PFD à la masse ; en projection sur l'axe (Ox) vertical descendant :

$$m\ddot{x} = mg - T \quad \text{avec} \quad \ddot{x} = R\dot{\theta} \quad (\text{cf. } 1)$$

$$\Rightarrow R\ddot{\theta} = g - \frac{T}{m} \quad (1)$$

• TMC à la poulie, par rapport à son axe de rotation :

$$\frac{d}{dt}\left(I\dot{\theta}\right) = M_z(\vec{T}) = R.T$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_p R^2 \ddot{\theta} = RT$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2T}{m_p R} \quad (2) \quad \Rightarrow T = \frac{1}{2} m_p R \ddot{\theta}$$

On remplace dans (1) :

$$R\ddot{\theta}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_p}{m}\right) = g$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2m\,g}{R(2m + m_p)} \quad , \text{d'où} : \ddot{x} = \frac{2m}{2m + m_p} g$$

(on retrouve que si $m \gg m_p$, $\ddot{x} = g$)

puis $T = \dfrac{m_p \cdot m}{m_p + 2m} g$

Ex 5 :

1) TMC au volant, par rapport à son axe de rotation :

$$\frac{d}{dt}(J\omega) = \underbrace{M_z(\vec{P})}_{\substack{=0 \text{ car} \\ \text{le centre de} \\ \text{gravité est} \\ \text{sur l'axe}}} \underbrace{- \alpha J}_{\substack{\text{moment des frottements solides} \\ (<0 \text{ car les frottements s'opposent} \\ \text{au mvt})}}$$

$$\Rightarrow \cancel{J}\dot{\omega} = -\alpha \cancel{J} \Rightarrow \dot{\omega} = -\alpha$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0 - \alpha t$$

Ainsi, le volant s'arrête lorsque $\omega = 0$, soit $t = \frac{\omega_0}{\alpha}$.

$$\Rightarrow \theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 + \theta_0$$

On a donc $\theta\left(\frac{\omega_0}{\alpha}\right) = N \text{ tours} = 2\pi N + \theta_0$,

soit : $2\pi N = \frac{\omega_0^2}{\alpha} - \frac{1}{2}\alpha\frac{\omega_0^2}{\alpha^2} = \frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{\alpha}$

Ainsi $\boxed{\alpha = \frac{\omega_0^2}{4\pi N}}$

2) Si on peut mesurer la vitesse angulaire, il suffit de vérifier qu'elle décroît de façon affine avec le temps.
Sinon, on peut lâcher le volant avec différents vitesses angulairs initials ω_0, et vérifier que le nbre de tours que fait le volant avant de s'arrêter est proportionnel à ω_0^2.

Ex 9 :

1) $\vec{L_o} = (l\,\vec{u_r}) \wedge (m\,l\,\dot\theta\,\vec{e_\theta}) = m\,l^2\,\dot\theta\,\vec{e_z}$

2) * Poids : $M_z(\vec{P}) = -mg\,l\,\sin\theta$
$= -mgl\theta$ (petits angles)

Rem : on évalue les moments par rapport à (Oz).

* Force de rappel du ressort 2 :

$$M_z(\vec{F_{R2}}) = -k\,\underbrace{(l\sin\theta)}_{\text{élongat°}}\,.\,\underbrace{(l\cos\theta)}_{\text{bras de levier}}$$

$\simeq -kl^2\theta$ dans l'approx. des petits angles.

* Force rappel ressort 1 :
idem : $M_z(\vec{F_{R1}}) \simeq -kl^2\theta$ (les deux force de rappel sont les mêmes : faites un dessin !)

3) $$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F})$$

$$\Rightarrow \quad m\,l^2\,\ddot\theta = -mgl\theta - 2k\,l^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad \ddot\theta + \frac{g}{l}\theta + 2\frac{k}{m}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot\theta + \underbrace{\left(\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\right)}_{\omega_o^2}\theta = 0$$

On reconnait l'équat° d'un oscillateur harmonique.
La période des petites oscillat°s est donc :

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}}$$

Ex 12 :

1) Il est galiléen aussi, car animé d'un mvt de translat° rectiligne uniforme par rapport à un ref. galiléen (principe de relativité galiléenne).

2) Si les roues roulent sans glisser, on a $v_0 = R\omega$,

donc $\omega = \frac{v_0}{R}$.

$= 12$ rad/s

Rem : c'est pas si évident que ça ; je vous laisse essayer de le comprendre...

3) $E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$

où I est le moment d'inertie de la roue :

$I = \sum_i m_i R_i^2 = m R^2$ où m est la masse de la roue

(car tous les points de la roue sont à la même distance R)

Donc $E_c = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \simeq 13$ J

4) L'énergie cinétique de translat° du système entier est $\frac{1}{2} M v_0^2$, d'où l'énergie cin. totale :

$E_{c,tot} = \frac{1}{2} (2m + M) v_0^2 = 286$ J

5) Le T.E.C. donne : $\frac{dE_{c,tot}}{dt} = P_{frein}$ où P_{frein} est la puissance de la force de freinage (car ni le poids ni la réact° du sol ne travaillent).

En intégrant la relation précédente (TEC) entre l'instant initial et l'instant final, on obtient :

$\underbrace{E_{c,tot}^{fin}}_{=0} - E_{c,tot}^{ini} = \langle P_{frein} \rangle \cdot \Delta t$

puissance moyenne $\langle P_{frein} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} P_{frein} \cdot dt$

$\Rightarrow \langle P_{frein} \rangle = \frac{-1}{2} \frac{(2m + M) v_0^2}{\Delta t} = -57$ W (<0 car résistif)