Feuille d'exercices n°1 : Oscillateur harmonique

Exercice 1 : Résolution de l'équation différentielle :

Un oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, avec $\omega_0 = 3{,}0\ rad.s^{-1}$.
Initialement (à t = 0), on a $x(0) = a = 50\,cm$ et $\dot{x}(0) = v_0 = 2{,}0\,m.s^{-1}$.

Résoudre l'équation différentielle et en déduire l'amplitude X_m des oscillations (expression littérale puis numérique).

Exercice 2 : Ressort vertical :

Un ressort de raideur $k = 10\ N.m^{-1}$ et de longueur à vide $l_0 = 30\ cm$ est accroché au plafond.
On suspend une masse $m = 500\,g$ à l'extrémité du ressort.

1) Quelle sera la longueur du ressort à l'équilibre, notée l_{eq} ? (n'oubliez pas de faire un schéma).
2) On étire à présent le ressort d'une distance $x_0 = 20\ cm$ par rapport à sa position d'équilibre puis on le lâche sans vitesse initiale. Etablir l'équation différentielle satisfaite par $x(t) = l - l_{eq}$ (les frottements de l'air sont négligés).

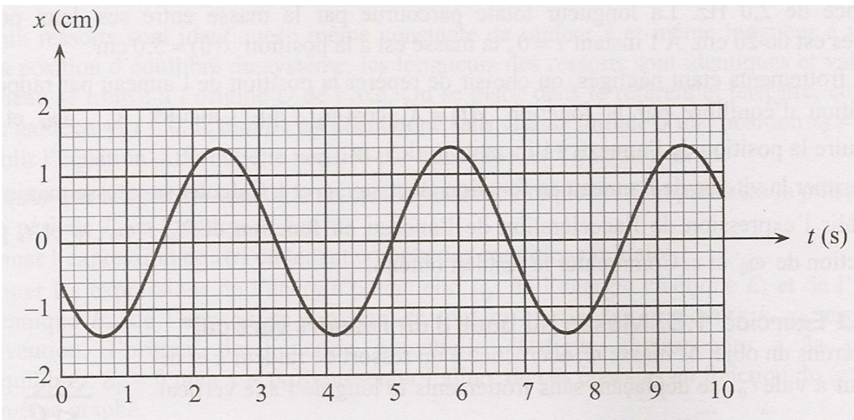
3) Résoudre cette équation différentielle. Quelle est la période des oscillations du ressort ?

4) À quelle distance du plafond se situera la masse au bout de t_0 = 1 min après qu'on l'ait lâchée ?

5) Montrer que l'énergie mécanique du système est constante au cours du mouvement (on n'oubliera pas de tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur : E_p = mgh, où h est l'altitude de la masse).

Exercice 3 : Analyse de données expérimentales :

En mesurant l'abscisse x(t) d'une masse accrochée au bout d'un ressort linéaire horizontal, repérée par rapport à sa position d'équilibre, on obtient le graphe suivant :



1) Déterminez les caractéristiques de l'oscillation : amplitude, pulsation propre, phase à l'origine.

2) L'objet au bout du ressort est de masse m = 50 g. En déduire la valeur de la constante de raideur k du ressort.

Exercice 4 : Caractérisation du mouvement d'un anneau :

Un anneau au bout d'un ressort oscille de manière sinusoïdale le long d'une tige horizontale à la fréquence de 2,0 Hz. La longueur totale parcourue par l'anneau entre ses deux positions extrêmes est de 20 cm. A l'instant t = 0, l'anneau est à la position x(0) = 5,0 cm.

1) Les frottements étant négligés, on choisit de repérer la position de l'anneau par rapport à sa position d'équilibre par la fonction $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Calculer $X_m,\ \omega_0\ et\ \varphi$. En déduire la position de l'anneau à l'instant $t_1 = 1{,}5\ s$.

2) Exprimer la vitesse de l'anneau en fonction de $X_m,\ \omega_0,\ \varphi\ et\ t$. Calculez sa vitesse maximale.

3) Etablir l'expression de l'accélération de l'anneau en fonction de $X_m,\ \omega_0,\ \varphi\ et\ t$, puis en fonction de ω_0 et x.

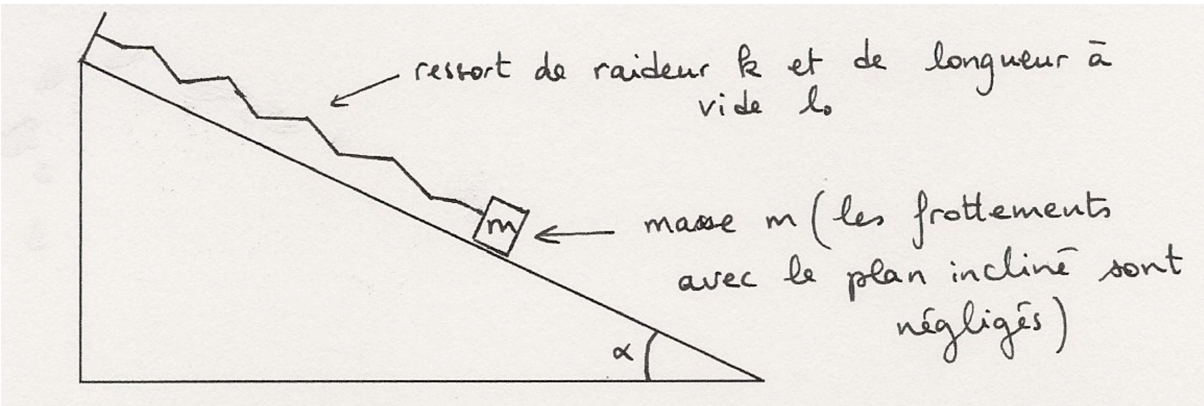
Exercice 5 : Bus et dos d'âne :

Un bus de masse m = 6 tonnes passe au-dessus d'un dos d'âne. Il oscille alors verticalement à la fréquence f = 1 Hz.
Au retour, le bus est rempli de passagers et sa masse est deux fois plus élevée. Quelle sera la fréquence des oscillations après le dos d'âne ?

Exercice 6 : Vibration d'un diapason :

Un diapason vibre à la fréquence du La4 soit $f = 440\ Hz$. On mesure sur une photo l'amplitude du mouvement de l'extrémité des branches : A = 0,5 mm.
Quelle est la vitesse maximale de l'extrémité du diapason ?
Quelle est l'accélération maximale de ce point ?

Exercice 7 : Ressort sur plan incliné :



Exprimez la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de m, g, k, l_o et α.

Exercice 8 : Vibration d'une molécule :

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est f = $8{,}5.10^{13}$ Hz.
On donne les masses atomiques molaires : $M_H = 1 g.mol^{-1}$ et $M_{Cl} = 35{,}5 g.mol^{-1}$ ainsi que le nombre d'Avogadro $N_A = 6{,}02.10^{23} mol^{-1}$.

On modélise la molécule par un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe par un « ressort » de raideur k.

1) Justifier l'hypothèse d'un atome de chlore fixe.

2) Calculer k.

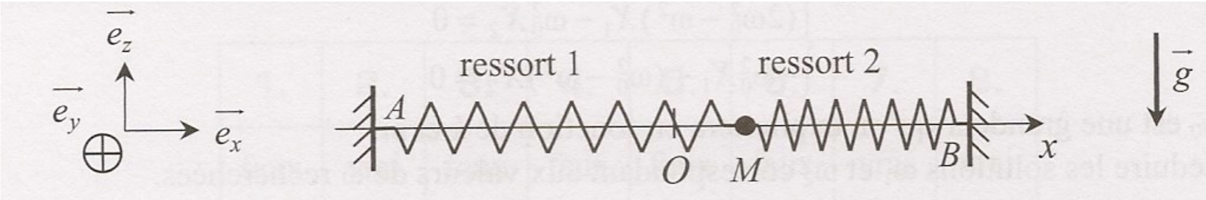
3) On admet que l'énergie mécanique de la molécule est $E_m = \frac{1}{2} hf$ où $h = 6{,}63.10^{-34} J.s$ est la constante de Planck. Calculer alors l'amplitude du mouvement de l'atome d'hydrogène (on pourra

retrouver la formule exprimant l'énergie mécanique d'un oscillateur en fonction de l'amplitude des oscillations).

4) Calculer sa vitesse maximale.

Exercice 9 : Oscillateur à deux ressorts :

Un petit anneau assimilé à un point matériel M de masse m est astreint à glisser sans frottements le long d'une tige horizontale de direction (Ox). Cet anneau est relié par deux ressorts identiques (raideur k, longueur à vide l_0) à deux points fixes A et B distants de D.



Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent l_{eq}, et l'anneau se trouve à l'origine O de l'axe.
A t = 0, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position $x_0 \neq 0$.

1) Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x(t) de l'anneau M.

2) Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 en fonction de k et m.

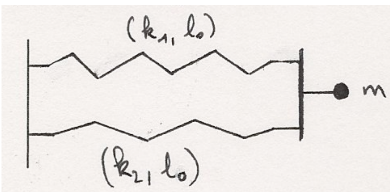
3) Donner l'expression de x(t) en tenant compte des conditions initiales.

4) Donner les expressions de l'énergie potentielle E_p, de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie mécanique E_m de l'anneau à un instant t (par convention, l'origine de l'énergie potentielle élastique correspondra à la position d'équilibre : E_p = 0 pour x = 0). Représenter l'allure de ces énergies en fonction du temps sur un même graphe.

Exercice 10 : Association de ressorts en série ou en parallèle :

Déterminer les caractéristiques (raideur k_{eq} et longueur à vide $l_{0,eq}$) du ressort équivalent aux associations suivantes :

1) Association en parallèle :



2) Association en série :