Exercice 2 : Satellite sur orbite circulaire :

1) On applique le principe fondamental de la dynamique au satellite dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{F} = -\frac{G m M_T}{r^2}\vec{u_r} \qquad (\text{où } r = R_T + h)$$

Or, si le mouvement est circulaire, $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + r\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

Donc, en projettant sur $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$:
$$\begin{cases} -mr\dot{\theta}^2 = -\dfrac{GmM_T}{r^2} \quad (1) \\ r\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cte \end{cases}$$
$\Rightarrow$ le mvt est uniforme

(1) donne : $\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r^3}}$

D'où $v = r\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r}} = \sqrt{\dfrac{GM_T}{(R_T+h)}}$

2) D'où la période : $T = \dfrac{2\pi r}{v} = 2\pi r \times \sqrt{\dfrac{r}{GM_T}}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = cte$$

L'équivalent de cette loi pour le système solaire est la 3ème loi de Kepler.

3) $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m\left(\sqrt{\dfrac{GM_T}{r}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{GmM_T}{r}$

$E_p = -\dfrac{K}{r} = -\dfrac{GmM_T}{r}$

$\Rightarrow E_m = E_c + E_p = -\dfrac{1}{2}\dfrac{GmM_T}{r}$

On voit que $E_c = -E_m$.

E_m est négative, ce qui est normal pour une trajectoire "liée" (bornée).

4) Sa période est $T_{géo} = 24\,h$

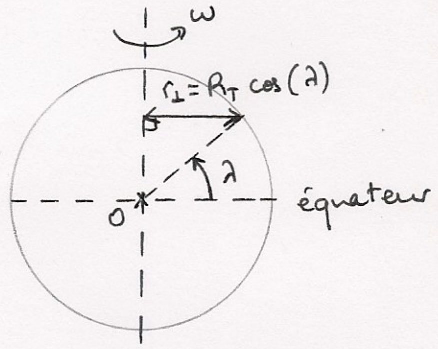
On en déduit le rayon de son orbite $r = \sqrt[3]{\dfrac{G M_T T^2}{4\pi^2}}$

$\Rightarrow r_{géo} = 42000$ km

$\Rightarrow h_{géo} = 36\,000$ km

Il s'agit d'une orbite lointaine (à titre de comparaison, l'altitude de l'orbite de la station spatiale internationale est seulement de 400 km).

5) a)



Dans le référentiel géocentrique, la terre est en rotation autour de son axe Nord/Sud à la vitesse angulaire

$\omega = \dfrac{2\pi}{24 \times 60 \times 60}$ rad . s^{-1}.

Un satellite a la latitude λ a donc initialement la même vitesse que le point de la Terre à cette latitude, soit :

$v_0 = r_\perp \cdot \omega = R_T \cos(\lambda) \cdot \omega$ ($\simeq 1700$ km/h au niveau de l'équateur)

D'où $E_m^{ini} = \dfrac{1}{2} m v_0^2 - \dfrac{G m M_T}{R_T}$

$= \dfrac{1}{2} m \cdot R_T^2 \cdot (\cos^2 \lambda) \omega^2 - \dfrac{G m M_T}{R_T}$

b) Le travail que la fusée doit fournir est égal à la différence d'énergie mécanique de la fusée entre sa position en orbite et sa position au sol (si on néglige les frottements dûs à l'atmosphère).

Soit $W = \Delta E_m = E_m^{final} - E_m^{ini}$ ← d'après question 3

$$= -\frac{1}{2}\frac{G m M_T}{(R_T + h)} - \frac{1}{2} m R_T^2 (\cos^2\lambda)\omega^2 + \frac{G m M_T}{R_T}$$

Pour minimiser W, il faut que $\cos\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 0° \Rightarrow$ la base de lancement doit être au niveau de l'équateur.

c) Pour un satellite de masse $m = 2$ tonnes.

* Depuis l'équateur : $W = 6{,}23.10^{10}$ J
$= 62{,}3$ GJ

* Depuis $\lambda = 55°$:
$W = 6{,}25.10^{10}$ J $= 62{,}5$ GJ

* D'où une économie relative de $\frac{62{,}5 - 62{,}3}{62{,}3} = 0{,}2\%$

Ce gain n'est donc pas énorme. Une autre raison qui explique que les bases de lancement sont souvent proches de l'équateur est qu'une bonne partie des satellites lancés sont géostationnaires et que l'orbite géostationnaire est dans le plan de l'équateur.