Exercice 3 : Changement d'orbite :

1) PFD au satellite dans le ref. géocentrique supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{F} = -G\frac{mM_T}{r_1^2}\vec{u_r}$$

Or pour un mouvement circulaire, la composante sur $\vec{u_r}$ de l'accélération est $-\frac{v^2}{r}$ (formule de Frenet). On a donc par projection sur $\vec{u_r}$:

$$-m\frac{v_1^2}{r_1} = -G\frac{mM_T}{r_1^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}}$$

$$= 7\,300 \text{ m/s}.$$

2) D'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L_o}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{F}) = \vec{OM}\wedge\vec{F} = \vec{0}$$ puisque la force est centrale

Donc $\vec{L_o} = \vec{cte}$

Or $\vec{L_o} = \vec{r}\wedge m\vec{v} = r\vec{u_r}\wedge(m(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}))$ [en polaires]

$$= mr^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}$$

Donc $r^2\dot{\theta} = cte$ (on le note C).

3) Exprimons l'énergie mécanique en un point de la trajectoire elliptique :

$$E_m = E_c + E_p$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r}$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta})^2 - \frac{K}{r}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{K}{r}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r}$$ (avec $C = r^2\dot{\theta}$)

Or en A et en P, $\dot{r} = 0$ car ce sont les extrema de la trajectoire.

Donc r_P et r_A sont solutions de l'équation :

$$E_m = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r}$$

$$\Leftrightarrow \quad E_m \cdot r^2 + Kr - \frac{mC^2}{2} = 0$$

La somme des 2 racines de cette équation vaut $-\frac{K}{E_m}$,

donc $r_P + r_A = -\frac{K}{E_m}$

Or $r_P + r_A = 2a$, donc $E_m = -\frac{K}{2a}$

$$= -\frac{G m M_T}{2a}$$

D'où sur la traj. de rayon r_1 :

$$E_m^1 = -\frac{G m M_T}{2r_1} = -2,4 \cdot 10^{10}\ J$$

Sur l'orbite de transfert : $E_m^t = -\frac{G m M_T}{2a}$

$$= -\frac{G m M_T}{(r_1 + r_2)} = -7,25 \cdot 10^9\ J$$

Sur l'orbite de rayon r_2 : $E_m^2 = -\frac{G m M_T}{2r_2} = -4,27 \cdot 10^9\ J$

4) Pour avoir la vitesse en P sur l'orbite elliptique, on utilise la formule $E_m = -\frac{G m M_T}{2a}$

Or $E_m = \frac{1}{2} m v_{e_1}^2 - \frac{G m M_T}{r_1}$,

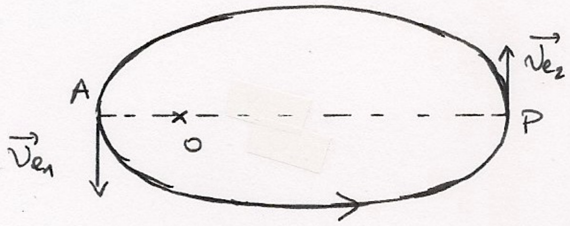
Donc $v_{e_1} = \sqrt{2 G M_T \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a}\right)} = 9500\ m/s$

$\Rightarrow \underline{\Delta v = 2200\ m/s}$

$W_P = E_m^t - E_m^1$ (le travail fourni par le moteur est égal à la variation d'énergie mécanique)

$= 1{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{J} = 17\ \text{GJ}$

5)



Le moment cinétique du satellite par rapport à O se conserve, donc $\vec{OA} \wedge (m\vec{v}_{e_1}) = \vec{OP} \wedge (m\vec{v}_{e_2})$

$\Rightarrow \|\vec{OA} \wedge \vec{v}_{e_1}\| = \|\vec{OP} \wedge \vec{v}_{e_2}\|$

$\Rightarrow OA \cdot v_{e_1} = OP \cdot v_{e_2}$ (car $\vec{OA} \perp \vec{v}_{e_1}$ et $\vec{OP} \perp \vec{v}_{e_2}$)

$\Rightarrow r_1 \cdot v_{e_1} = r_2 \cdot v_{e_2}$

$\Rightarrow v_{e_2} = \dfrac{r_1}{r_2} v_{e_1} \simeq 1700\ \text{m/s}$

6) De plus $v_2 = \sqrt{\dfrac{G M_T}{r_2}} = 3100\ \text{m/s}$

$\Rightarrow \Delta v_A \simeq 1400\ \text{m/s}$

et $W_A = E_m^2 - E_m^t = 3{,}0 \cdot 10^9\ \text{J} \simeq 3\ \text{GJ}$

$\Rightarrow$ le travail fourni par les moteurs est beaucoup plus faible à l'apogée qu'au périgée.