Feuille d'exercices n°2 : Propagation d'un signal

<u>Exercice 1 : Spectre d'un produit de fonctions sinusoïdales :</u>

On considère le signal $s(t) = A\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t + \varphi)$ avec $A = 10V$ (le signal est une tension), $f_1 = 600\,Hz$, $f_2 = 800\,Hz$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

À l'aide d'une formule de trigonométrie, représenter le spectre d'amplitude et de phase de s(t).

<u>Exercice 2 : Position et date d'un séisme :</u>

Un séisme produit deux types d'ondes sismiques : les ondes P, longitudinales, qui se propagent avec la célérité c_P et les ondes S, transversales, qui se propagent avec la célérité $c_S < c_P$.

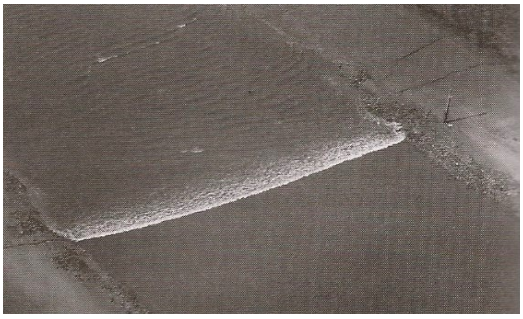
1) Lors d'un séisme, on commence à détecter les premières à l'instant t_P et les secondes à l'instant t_S. Montrer que l'on peut en déduire, connaissant c_P et c_S, la distance D entre le foyer du séisme et la station de mesure, ainsi que le moment où a eu lieu le séisme.

2) Pour un séisme, on mesure les distances D_1, D_2 et D_3 entre le foyer du séisme et trois stations de mesures. Cette information permet-elle de localiser le foyer du séisme à l'intérieur de la Terre ?
Quel autre système fonctionne sur ce même principe ?

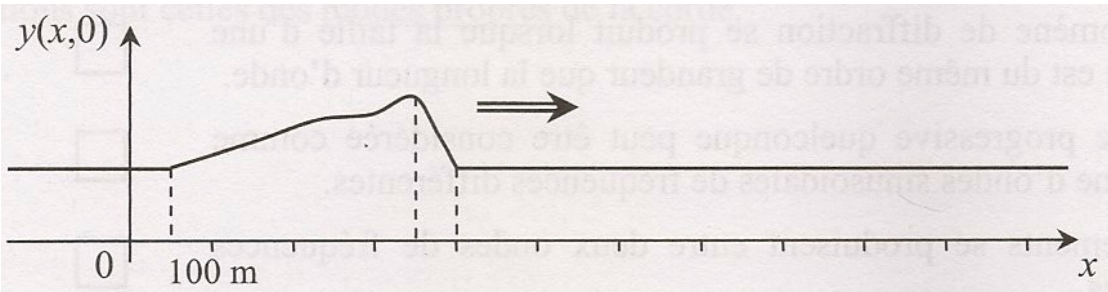
<u>Exercice 3 : Mascaret :</u>

Un mascaret est une vague solitaire remontant un fleuve au voisinage de son estuaire, et provoquée par une interaction entre son écoulement et la marée montante.

On considère ici un mascaret se déplaçant à la vitesse c = 20 km/h le long d'un fleuve rectiligne, et on définit un axe (Ox) dans la direction et le sens de propagation.



A l'instant $t_0 = 0$, le profil au niveau de l'eau du fleuve a l'allure suivante :



1) Faire un schéma du profil de niveau du fleuve à t = 1,0 minute, en supposant que l'onde se propage sans déformation.

2) Bob attend avec sa planche de surf à l'abscisse x_T = 2,0 km. A quel instant va-t-il recevoir la vague ?

3) Un détecteur fixe, enregistrant le hauteur du fleuve en fonction du temps, est placé à l'abscisse x_d = 1,4 km. Dessiner l'allure des variations y(x,t) en fonction de t.

4) En réalité, l'onde se déforme petit à petit car la vitesse de propagation augmente avec la hauteur du niveau de l'eau. Comment évolue alors le profil de la vague ?

Exercice 4 : Four à micro-ondes :

Calculez la longueur d'onde de l'onde électromagnétique qui existe dans un four à micro-ondes, sachant que sa fréquence est $f = 2{,}45\,GHz$ et que la célérité des ondes électromagnétiques est $c = 3{,}00.10^{8}\,m.s^{-1}$.

Exercice 5 : Taille des antennes radio :

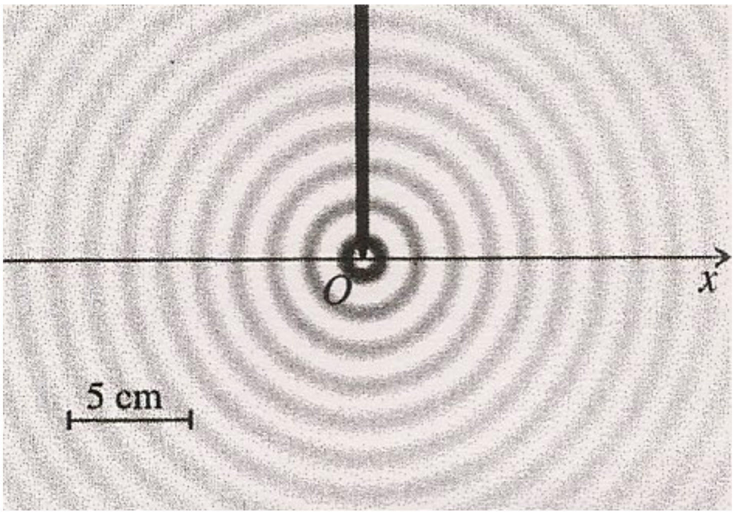
Les antennes qui émettent des ondes électromagnétiques dans l'espace, ou qui les reçoivent, doivent avoir une longueur de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ des ondes émises : on choisit généralement un sous-multiple, comme $\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{8}$ ...

1) Pour transmettre la radio, on pourrait envisager d'émettre des signaux électromagnétiques ayant les mêmes fréquences que les sons audibles (audiofréquences). Calculer les longueurs d'onde dans l'air de telles ondes électromagnétiques, et montrer que la taille des antennes serait irréalisable.

2) On transforme alors ces signaux par un procédé appelé modulation de fréquence (FM), qui leur donne des fréquences beaucoup plus élevées, entre 87,5 MHz et 108 MHz. Calculer les longueurs d'onde dans l'air des ondes de radio FM, et en déduire l'ordre de grandeur de la taille des antennes nécessaires.

3) Voyez-vous une autre raison pour laquelle les stations de radio ne pourraient pas émettre dans le domaine des audiofréquences ?

Exercice 6 : Cuve à ondes :



La figure ci-dessus représente la surface d'une cuve à onde éclairée en éclairage stroboscopique. L'onde est engendrée par un vibreur de fréquence $f = 18\,Hz$. L'image est claire là où la surface de l'eau est convexe, foncée là où elle est concave.

1) En mesurant sur la figure, déterminer la longueur d'onde.

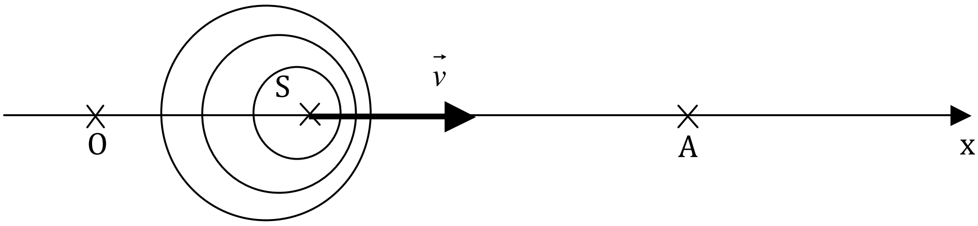
2) En déduire la célérité de l'onde.

3) On suppose l'onde sinusoïdale, d'amplitude A constante et de phase initiale nulle en O. Ecrire le signal s(x,t) pour x > 0 et pour x < 0.

4) Expliquer pourquoi A n'est pas, en fait, constante.

Exercice 7 : Effet Doppler :

Une source S émet une onde de fréquence f et de célérité c tout en se déplaçant à la vitesse v dans la direction de l'axe (Ox). Un observateur, noté A, est situé sur l'axe (Ox) à droite de la source, et reste immobile.



1) Exprimer (en le démontrant précisément) la fréquence f' de l'onde que reçoit A en fonction de f, c et v,

2) Combien vaudrait f' si A était situé à gauche de O ?

3) Application : la sirène des pompiers contient deux sons, un à 488 Hz et l'autre à 435 Hz (approximativement un Si et un La). Si un camion de pompiers passe à côté de vous en roulant à 70 km/h, quelles fréquences entendrez vous avant et après qu'il soit passé ?

4) On suppose maintenant que la source S est immobile et que A se dirige vers S à la vitesse v. Quelle est la fréquence f' de l'onde que reçoit A ?

5) Un automobiliste grille un feu rouge. Pour se justifier, il explique au policier qu'à cause de l'effet Doppler, il a vu le feu vert et non pas rouge. A quelle vitesse aurait-il fallu qu'il roule pour que son explication soit correcte ?

6) Quelles applications pratiques de l'effet Doppler connaissez-vous ?

Exercice 8 : Trains d'ondes :

Une onde se propage dans la direction de l'axe (Ox), dans le sens positif avec la célérité c. La source, située en x = 0, émet un train d'ondes, c'est à dire une oscillation de durée limitée. Plus précisément, on a :

$$s(0,t) = \begin{cases} 0 \ si \ t < 0 \\ \sin\left(2\pi \dfrac{t}{T}\right) si \ 0 \leq t < 4T \\ 0 \ si \ t \geq 4T \end{cases}$$

1) Exprimez s(x,t) pour x positif quelconque.

2) Représentez graphiquement s(x, 2T) et s(x, 6T) en fonction de x pour x > 0. Quelle est la longueur du train d'ondes dans l'espace ?

Exercice 9 : Analyse dimensionnelle :

On étudie la propagation horizontale d'une onde mécanique longitudinale dans une chaîne infinie de masses ponctuelles m reliées par des ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide a. Par une analyse dimensionnelle, déterminer l'expression correcte de la célérité de cette onde :

a) $c = \sqrt{\dfrac{m}{k\,a}}$ b) $c = \sqrt{\dfrac{k}{m\,a}}$ c) $c = \sqrt{\dfrac{k\,a^2}{m}}$ d) $c = \sqrt{\dfrac{k}{m\,a^2}}$

Exercice 10 : Equation de d'Alembert :

Montrer que l'onde progressive sinusoïdale $s(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles suivantes : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$, appelée « équation de d'Alembert » (c'est l'équation différentielle satisfaite par les ondes).

Remarque : $\frac{\partial s}{\partial t}$ s'appelle « dérivée partielle de s par rapport à t », elle s'obtient en dérivant s par rapport à t en traitant x comme une constante.