Correction d'exercices de la feuille 13 : Cinématique

Exercice 11 :

1) On sait que pour un mouvement circulaire la vitesse s'écrit :

$$v = R\omega = 30.10^{-2} \times \frac{2\pi \times 640}{60} = 20m.s^{-1} = 72km/h$$

2) Notons $\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt}$ l'accélération angulaire de la scie. Comme la scie ralentit uniformément, on a $\ddot{\theta} = cte$, donc $\ddot{\theta} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{0 - \frac{2\pi \times 640}{60}}{6} = -11,2rad.s^{-2}$.
Puisque $\ddot{\theta} = cte$, on a, en intégrant :

$$\omega = \dot{\theta} = \ddot{\theta} \times t + cte = -11,2 \times t + \frac{2\pi \times 640}{60} = -11,2 \times t + 67$$

3) Il suffit d'intégrer une fois de plus pour avoir $\theta(t)$:

$$\theta(t) = -\frac{11,2}{2} \times t^2 + 67 \times t + cte$$

où la constante est nulle en prenant $\theta(t = 0) = 0$.
On en déduit l'angle total parcouru par la scie durant la phase d'arrêt :

$$\theta(6s) = -\frac{11,2}{2} \times 6^2 + 67 \times 6 \simeq 200rad$$

Pour avoir le nombre de tours N, il suffit alors de diviser par 2π :

$$N = \frac{200}{2\pi} \simeq 32\ tours$$

Exercice 12 :

1) Notons (x_I, y_I) les coordonnées cartésiennes du point I. On a, en notant θ l'angle entre le barreau et le sol :

$$x_I = \frac{L}{2}\cos(\theta)$$

et :

$$y_I = \frac{L}{2}\sin(\theta)$$

On reconnait les équations paramétriques d'un arc de cercle de centre O et de rayon $L/2$ (si vous n'êtes pas convaincus, il est immédiat de vérifier que $x_I^2 + y_I^2 = (\frac{L}{2})^2)$: la trajectoire est donc un arc de cercle.

2) Pour un point M quelconque du barreau, on a :

$$x_M = b\cos(\theta)$$

et

$$y_M = (L - b)\sin(\theta)$$

La trajectoire sera donc un arc d'ellipse de demi-axes b et $L - b$.

Exercice 14 : Les trois torpilles :

Pour plus de clarté dans la rédaction, on a fait tourner le triangle et échangé les torpilles 2 et 3 (voir figure). Evidemment, ça ne change absolument rien aux résultats.

On peut déjà remarquer que, pour des raisons de symétrie, les torpilles vont forcément se rencontrer au centre du triangle équilatéral ("where else ?"), et qu'à chaque instant, les positions des trois torpilles définissent un triangle équilatéral. On a donc la situation de la figure 1.

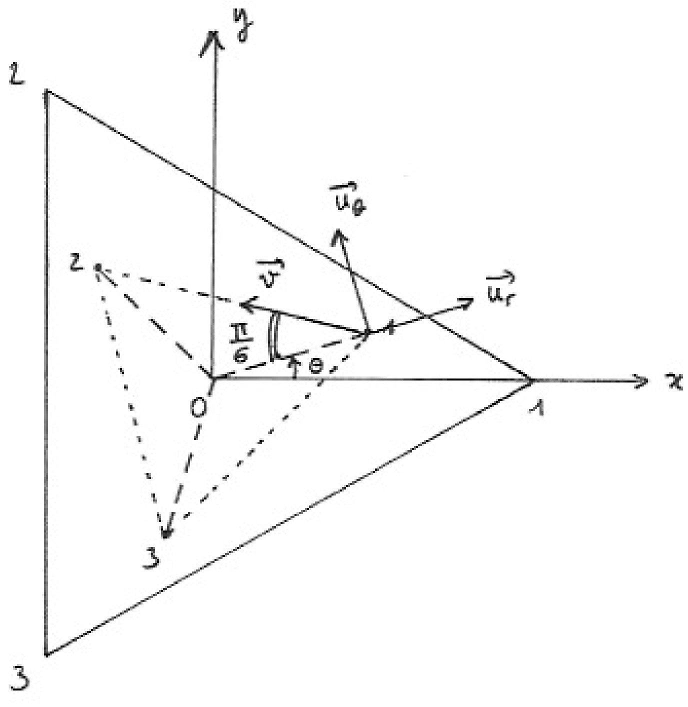

FIGURE 1 – Position des torpilles à un instant quelconque

On va repérer la position de la torpille 1 par ses coordonnées polaires (r, θ) et exprimer de deux façons différentes le vecteur vitesse de cette torpille. D'une part, d'après la formule de la vitesse en polaires, on a :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

D'autre part, on sait que $\vec{v}$ a pour norme constante v et qu'il est en permanence dirigé vers la torpille 2. En utilisant la figure pour les projections, on a donc :

$$\vec{v} = v(-\cos(\frac{\pi}{6})\vec{u}_r + \sin(\frac{\pi}{6})\vec{u}_\theta) = v(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_r + \frac{1}{2}\vec{u}_\theta)$$

En identifiant les deux expressions de $\vec{v}$ (puisque $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est une base), il vient :

$$\dot{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}v \tag{1}$$

et

$$r\dot{\theta} = \frac{v}{2} \tag{2}$$

Puisque v est constant, l'équation (1) s'intègre ensuite en : $r(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}vt + cte$, où la constante est la distance initiale entre la torpille 1 et le centre du triangle équilatéral. Sachant que le centre d'un triangle équilatéral est situé aux 2/3 de ses hauteurs, il vient, avec un peu de trigonométrie élémentaire, que $cte = \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.
D'où l'équation horaire pour $r(t)$:

$$r(t) = \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}vt$$

Il suffit alors de résoudre $r(T) = 0$, ce qui donne une durée $T = \frac{2a}{3v}$ (on vérifie facilement que cette expression est homogène).

3) Puisque le mouvement de la torpille est uniforme (i.e. la norme de sa vitesse est constante), on a que $vitesse = \frac{distance}{temps}$, d'où la distance que parcourent les torpilles avant de se rencontrer :

$$D = vT = \frac{2a}{3}$$

4) En combinant les équations (1) et (2), on obtient que :

$$\dot{r} = -\sqrt{3}r\dot{\theta}$$

soit :

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{3}r\frac{d\theta}{dt}$$

D'où en simplifiant par dt puis en effectuant une séparation des variables :

$$\frac{dr}{r} = -\sqrt{3}d\theta$$

En intégrant, on obtient donc :

$$ln(r) = -\sqrt{3}\theta + cte$$

Or pour $\theta = 0$, $r = a/\sqrt{3}$, d'où $cte = ln(a/\sqrt{3})$.
En prenant l'exponentielle, on obtient alors :

$$r(\theta) = \frac{a}{\sqrt{3}}\exp(-\sqrt{3}\theta)$$

qui est l'équation d'une spirale logarithmique.

On peut tracer cette trajectoire avec le langage Python, ce qui donne la figure 2.

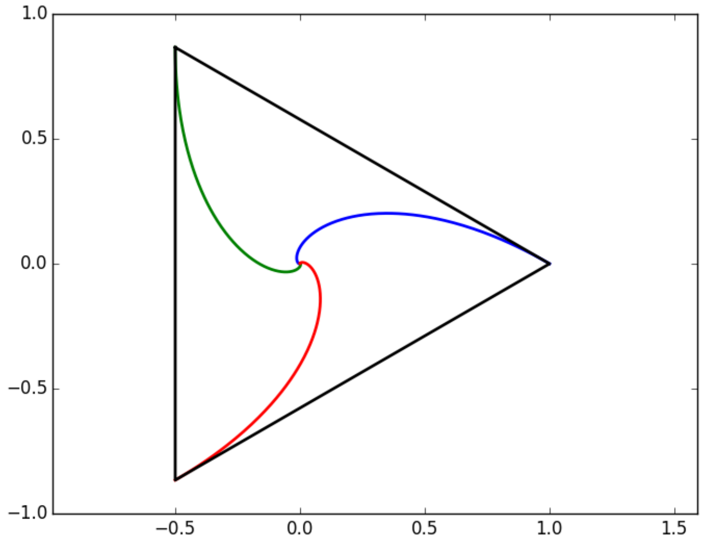

FIGURE 2 – Trajectoires des trois torpilles